



MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 07.02.2026

CLASA a IX - a

Problema 1 (22,5 p)

Fie $x, y, z > 0$ astfel încât $x \cdot y \cdot z = 8$.

a) Arătați că: $x + y + z \geq 6$ și $\sqrt{2x} + \sqrt{2y} + \sqrt{2z} \leq x + y + z$;

b) Determinați numerele $x, y, z > 0$, știind că ele verifică, în plus, și relația:

$$\frac{x^2}{y+3z+\sqrt{2x}} + \frac{y^2}{z+3x+\sqrt{2y}} + \frac{z^2}{x+3y+\sqrt{2z}} = \frac{6}{5}$$

Problema 2 (22,5 p)

Să se demonstreze că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, are loc egalitatea:

$$\sum_{k=1}^n \frac{k \cdot 2^{k-1}}{(k+1)(k+2)} = \frac{2^n}{n+2} - \frac{1}{2}$$

Problema 3 (22,5 p)

Fie n și k două numere naturale prime între ele. Să se demonstreze egalitatea:

$$\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2n}{k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3n}{k} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{(k-1)n}{k} \right\rfloor = \frac{(n-1)(k-1)}{2}$$

Problema 4 (22,5 p)

Se consideră triunghiul ABC, punctul D mijlocul laturii [BC] și punctele M, N și P din plan cu proprietatea că $4\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$, $5\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AC}$ și $5\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{BC}$. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC și $PG \cap AB = \{Q\}$.

a) Arătați că $G \in MN$;

b) Aflați valoarea raportului $\frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{AB}}$.

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru 3 ore.

Din oficiu: 10 p.